A short proof of a resultat on the Z-statistic

Guo-Niu Han

translated by Jordan Tirrell*

Une courte démonstration d'un résultat sur la Z-statistique

C. R. Acad. Sci. Paris, Série I, 314(1992), 969-971

RÉSUMÉ - BRESSOUD et ZEILBERGER ont introduit la Z-statistique et démontré d'une façon analytique quelle est mahonienne. Puis GREENE a donné une bijection de style "MacMahon" en utilisant le principe d'involution de Garsia-Milne. Cette Note fournit une démonstration directe en établissant une bijection de style "Foata" sur l'ensemble des réarrangements d'un mot donné.

Abstract

BRESSOUD and ZEILBERGER introduced the Z-statistic and gave an analytical proof of the fact that it was mahonian. Then GREENE derived a "MacMahon" style bijection by using the Garsia-Milne involution principle. This Note provides a direct proof of that fact by means of a "Foata" style bijection over the rearrangement set of a given word.[1]

1 Introduction (Introduction)

Pour démontrer la conjecture de q-Dyson proposée par ANDREWS [1], BRESSOUD et ZEILBERGER [2] ont introduit la Z-statistique définie pour les mots et démontré d'une façon analytique que cette statistique était mahonienne. Pour établir ce dernier fait, GREENE [3] a donné une bijection de style "MacMahon" en utilisant le principe d'involution de Garsia-Milne. Enfin, BRESSOUD [4] a indiqué plusieurs voies possibles pour construire une bijection directe, mais sans obtenir de résultats explicites. Le but de cette Note est de donner la construction d'une telle bijection.

To prove the q-Dyson conjecture proposed by Andrews [1], Bressoud and Zeilberger [2] introduced the Z-statistic on words and demonstrated analytically that this statistic was mahonian. To determine the latter fact GREENE [3] gave a "MacMahon" style bijection using the Garsia-Milne involution principle. Finally, Bressoud [4] indicated possible ways to build a direct bijection but without obtaining explicit results. The purpose of this note is to give the construction of such a bijection.

2 Notation (Notations)

Soient $A = \{1, 2, 3, \ldots, r\}$ un alphabet totalement ordonné et A^* le monoïde libre engendré par A. Les éléments de A sont appelés mots. On note $|w|_i$ le nombre d'occurrences de la lettre i dans le mot

*translated Spring 2015 to satisfy a PhD requirement at Brandeis University

[1]English title and abstract are from Han's original paper.

w, la somme de tous ces nombres étant la longueur de w, notée $|w|$. L'évaluation d'un mot w est l'image de ce mot par le morphisme naturel de A^* sur le monoïde commutatif libre de même base, i.e., $1^{|w|_1}2^{|w|_2}\dots r^{|w|_r}$. La suite des entiers $\mathbf{m} = (|w|_1, |w|_2, \dots, |w|_r)$ est dite multiplicité du mot w; et l'ensemble des mots de multiplicité $\mathbf{m}$ est noté $R(\mathbf{m})$. Les mots ayant la même multiplicité que w sont appelés réarrangements du mot w.

Let $A = \{1, 2, 3, \dots, r\}$ be a totally ordered alphabet and A^* the free monoid generated by A. The elements of A^* are called *words*. We denote by $|w|_i$ the number of occurrences of the letter i in the word w, the sum of all these numbers is the *length* of w, denoted $|w|$. The *evaluation* of a word w is the image of that word by the natural morphism from A^* to the free commutative monoid on the same basis, i.e., $1^{|w|_1}2^{|w|_2}\dots r^{|w|_r}$. The sequence of integers $\mathbf{m} = (|w|_1, |w|_2, \dots, |w|_r)$ is called the *multiplicity* of the word w; and the set of words of multiplicity $\mathbf{m}$ is denoted by $R(\mathbf{m})$. Words with the same multiplicity as w are called *rearrangements* of the word w.

L'indice majeur est défini, pour tout mot $w = x_1x_2\dots x_l$, par

$$\text{maj } w = \sum\{i | 1 \le i \le l-1, x_i > x_{i+1}\}$$

et la Z-statistique par

$$Z(w) = \sum_{i<j} \text{maj } w_{ij}$$

où w_{ij} est le sous-mot de w composé de toutes les lettres i et j. Par exemple, pour $w = 2412131242 \in R(3, 4, 1, 2)$, on a :

$$\begin{aligned}
&\text{maj } w = 2+4+6+9 = 21, \text{ et} \\
&Z(w) = \text{maj}(2121122) + \text{maj}(1131) + \text{maj}(41114) + \text{maj}(22322) + \text{maj}(242242) + \text{maj}(434) \\
&\qquad = 4+3+1+3+7+1 = 19.
\end{aligned}$$

The *major index* is defined, for any word $w = x_1x_2\dots x_l$, as

$$\text{maj } w = \sum\{i | 1 \le i \le l-1, x_i > x_{i+1}\}$$

and the *Z-statistic* as

$$Z(w) = \sum_{i<j} \text{maj } w_{ij}$$

where w_{ij} is the sub-word of w consisting of all letters i and j. For example, for $w = 2412131242 \in R(3, 4, 1, 2)$, we have:

$$\begin{aligned}
&\text{maj } w = 2+4+6+9 = 21, \text{ and} \\
&Z(w) = \text{maj}(2121122) + \text{maj}(1131) + \text{maj}(41114) + \text{maj}(22322) + \text{maj}(242242) + \text{maj}(434) \\
&\qquad = 4+3+1+3+7+1 = 19.
\end{aligned}$$

Une bijection sur A^* est dite de style "Foata", si elle est de la forme suivante (cf. [5]) :

$$\begin{cases} \Phi(w) = w, & \text{si } |w| \le 1; \\ \Phi(wx) = (\gamma_x \circ \Phi \circ \beta_x(w))x, & \text{pour toute lettre } x \in A; \end{cases}$$

où pour x fixé, γ_x et β_x sont deux bijections sur A^* telles que $\gamma_x \circ \Phi \circ \beta_x(w)$ est un réarrangement de w.

Le problème est de construire une bijection de style “Foata” ayant la propriété suivante (cf. [2], [3], [4], [6]) :

$$\text{maj } w = Z(\Phi(w)). \qquad (\Delta)$$

A bijection on A^* is called *“Foata” style*, if it is of the following form (cf. [5]):

$$\begin{cases} \Phi(w) = w, & \text{if } |w| \le 1; \\ \Phi(wx) = (\gamma_x \circ \Phi \circ \beta_x(w))x, & \text{for any letter } x \in A; \end{cases}$$

where for fixed x, γ_x and β_x are two bijections on A^*, such that $\gamma_x \circ \Phi \circ \beta_x(w)$ is a rearrangement of w.

The problem is to construct a “Foata” style bijection having the following property (see [2], [3], [4], [6]):

$$\text{maj } w = Z(\Phi(w)). \qquad (\Delta)$$

3 Global cycling and local cycling (Cyclage global et cyclage local)

Soit $\mathbf{m} = (m_1, m_2, \ldots, m_r)$ une multiplicité. Pour tout mot $w = x_1x_2 \ldots x_l \in R(\mathbf{m}) \subset A^*$ et toute lettre $x \in A$, le cyclage global $C^x(w) = y_1y_2 \ldots y_l$ et le cyclage local $C_x(w) = z_1z_2 \ldots z_l$ sont définis par

$$y_i = \begin{cases} x_i - x, & \text{si } x_i > x; \\ x_i - x + r, & \text{sinon.} \end{cases} \qquad z_i = \begin{cases} x_i, & \text{si } x_i < x; \\ x_i - 1, & \text{si } x_i > x; \\ r, & \text{si } x_i = x. \end{cases}$$

Let $\mathbf{m} = (m_1, m_2, \ldots, m_r)$ be a multiplicity. For any word $w = x_1x_2 \ldots x_l \in R(\mathbf{m}) \subset A^*$ and any letter $x \in A$, the *global cycling* $C^x(w) = y_1y_2 \ldots y_l$ and the *local cycling* $C_x(w) = z_1z_2 \ldots z_l$ are defined by

$$y_i = \begin{cases} x_i - x, & \text{if } x_i > x; \\ x_i - x + r, & \text{otherwise.} \end{cases} \qquad z_i = \begin{cases} x_i, & \text{if } x_i < x; \\ x_i - 1, & \text{if } x_i > x; \\ r, & \text{if } x_i = x. \end{cases}$$

On vérifie facilement que la multiplicité de $C^x(w)$ et $C_x(w)$ est respectivement

$$\mathbf{m}^x = (m_{x+1}, m_{x+2}, \ldots, m_r, m_1, m_2, \ldots, m_{x-1}, m_x)$$

et

$$\mathbf{m}_x = (m_1, m_2, \ldots, m_{x-1}, m_{x+1}, m_{x+2}, \ldots, m_r, m_x).$$

Par ces deux opérations de cyclage, les changements de valeur des statistiques sont décrits dans le lemme suivant :

We easily verify that the multiplicity of $C^x(w)$ and $C_x(w)$ is respectively

$$\mathbf{m}^x = (m_{x+1}, m_{x+2}, \ldots, m_r, m_1, m_2, \ldots, m_{x-1}, m_x)$$

and

$$\mathbf{m}_x = (m_1, m_2, \dots, m_{x-1}, m_{x+1}, m_{x+2}, \dots, m_r, m_x).$$

Changes in the values of the statistics by these two cycling operations are described in the following lemma:

Lemme. - Avec les notations précédentes, si $x = x_l$ la dernière lettre du mot w, alors on a

(a) $\mathrm{maj}\ w - \mathrm{maj}\ (C^x(w)) = m_{x+1} + m_{x+2} + \cdots + m_r$;

(b) $Z(w) - Z(C_x(w)) = m_{x+1} + m_{x+2} + \cdots + m_r$.

Prenons encore l'exemple précédent. On a : $x = x_l = 2$ et $r = 4$. Le cyclage global est donc $C^x(w) = 4234313424$ et le cyclage local $C_x(w) = 4214121434$. Or maj $C^x(w) = 18$ et $Z(C_x(w)) = 16$. Comme $m_2 + m_4 = 1 + 2 = 3$, le lemme est bien vérifié pour ce mot.

Lemma. - With the above notation, if $x = x_l$, the last letter of the word w, then we have

(a) $\mathrm{maj}\ w - \mathrm{maj}\ (C^x(w)) = m_{x+1} + m_{x+2} + \cdots + m_r$;

(b) $Z(w) - Z(C_x(w)) = m_{x+1} + m_{x+2} + \cdots + m_r$.

Consider again the example above. We have: $x = x_l = 2$ and $r = 4$. The global cycling is $C^x(w) = 4234313424$ and the local cycling is $C_x(w) = 4214121434$. However maj $C^x(w) = 18$ and $Z(C_x(w)) = 16$. As $m_2 + m_4 = 1 + 2 = 3$, the lemma is checked for that word.

DÉMONSTRATION

(a) Avec les notations précédentes, on décompose le mot w de façon unique comme suit

$$w = p_0 q_1 p_1 q_2 p_2 \dots q_s p_s,$$

où les p_i sont des mots dont toutes lettres sont inférieures ou égales à x et où les q_i sont des mots dont toutes les lettres sont plus grandes que x, avec $|p_i| \geq 1$, $|q_i| \geq 1$ pour tout $i \geq 1$ et $|p_0| \geq 0$. Or la dernière lettre de chaque facteur p_i(resp. q_i) est inférieure (resp. supérieure) à la première lettre du facteur suivant q_{i+1}(resp. p_i). On dit qu'il y a une montée à la fin du facteur p_i et une descente à la fin du facteur q_i . Dans le mot $C^x(w)$, ces montées deviennent des descentes et les descentes des montées, les autres montées ou descentes restant invariantes. On a donc

$$\mathrm{maj}\ w - \mathrm{maj}\ (C^x(w)) = |q_1| + |q_2| + \cdots + |q_s| = m_{x+1} + m_{x+2} + \cdots + m_r.$$

PROOF (a) With the previous notation, we can decompose the word w uniquely as follows

$$w = p_0 q_1 p_1 q_2 p_2 \dots q_s p_s,$$

where p_i are words whose letters are all less than or equal to x, and where q_i are words of which all the letters are greater than x, with $|p_i| \geq 1$, $|q_i| \geq 1$ for all $i \geq 1$ and $|p_0| \geq 0$. But the last letter of each factor p_i (resp. q_i) is lower (resp. higher) than the first letter of the next factor q_{i+1} (resp. p_i). It is said that there is an ascent at the end of the factor p_i and a descent at the end of the factor q_i. In the word $C^x(w)$, these ascents become descents and these descents become ascents, with the other ascents and descents remaining invariant. Therefore we have

$$\mathrm{maj}\ w - \mathrm{maj}\ (C^x(w)) = |q_1| + |q_2| + \cdots + |q_s| = m_{x+1} + m_{x+2} + \cdots + m_r.$$

(b) Soit $a \in A$ une lettre apparaissant dans le mot w, on note a' l'image de a par le cyclage local C_x. Pour tout $i < j$, si $i \neq x$, les sous-mots w_{ij} et $(C_x w)_{i'j'}$ sont identiques à la réduction près. D'autre part, pour tout $x < j$, on a, d'après (a), maj w_{xj} − maj $(C^x w)_{x'j'} = m_j$. Comme les deux cyclages sont identiques à la réduction près pour les mots à deux lettres, on a :

$$\begin{aligned} Z(w) - Z(C_x(w)) &= \sum_{x<j} (\text{maj } (w_{xj}) - \text{maj } ((C_x w)_{x'j'})) \\ &= m_{x+1} + m_{x+2} + \cdots + m_r. \end{aligned}$$

(b) For $a \in A$ a letter appearing in the word w, denote by a' the image of a by the local cycling C_x. For all $i < j$, if $i \neq x$, the sub-word w_{ij} and $(C_x w)_{i'j'}$ are identical in their reduced form. On the other hand, for all $x < j$, we have, by (a), maj w_{xj} − maj $(C^x w)_{x'j'} = m_j$. Since both cyclings are identical in their reduced form on the two-letter words, we have:

$$\begin{aligned} Z(w) - Z(C_x(w)) &= \sum_{x<j} (\text{maj } (w_{xj}) - \text{maj } ((C_x w)_{x'j'})) \\ &= m_{x+1} + m_{x+2} + \cdots + m_r. \end{aligned}$$

4 Construction of the bijection Φ (Construction de la bijection Φ)

Soient $\mathbf{m} = (m_1, m_2, \ldots, m_r)$ une multiplicité et $\mathbf{n}$ un réarrangement de $\mathbf{m}$ vu comme un mot. Rappelons d'abord la construction d'une bijection $\theta_{\mathbf{m},\mathbf{n}}$, définie sur $R(\mathbf{m})$, à valeurs dans $R(\mathbf{n})$, conservant la statistique "maj". Il suffit de donner cette construction lorsque $\mathbf{m}$ et $\mathbf{n}$ ne diffèrent que par deux lettres consécutives, disons x et y, autrement dit la construction d'une bijection

$$\theta : R(m_1, m_2, \ldots, m_x, m_y, \ldots, m_r) \to R(m_1, m_2, \ldots, m_y, m_x, \ldots, m_r).$$

Let $\mathbf{m} = (m_1, m_2, \ldots, m_r)$ a multiplicity and $\mathbf{n}$ a rearrangement of $\mathbf{m}$ viewed as a word. First recall the construction of a bijection $\theta_{\mathbf{m},\mathbf{n}}$, defined on $R(\mathbf{m})$, with values in $R(\mathbf{n})$, conserving the "maj" statistic. It suffices to give this construction when $\mathbf{m}$ and $\mathbf{n}$ differ only by two consecutive letters, say x and y, i.e. to construct a bijection

$$\theta : R(m_1, m_2, \ldots, m_x, m_y, \ldots, m_r) \to R(m_1, m_2, \ldots, m_y, m_x, \ldots, m_r).$$

On s'y prend comme suit : soit w un mot du premier ensemble. On remplace tous les facteurs yx de ce mot par une lettre spéciale " $\sim$". Dans le mot ainsi obtenu, les facteurs maximaux contenant les deux lettres x et y ont la forme $x^a y^b (a \geq 0, b \geq 0)$. On change alors ces facteurs en $x^b y^a$ et remplace chaque "$\sim$" par yx, pour obtenir le mot w' du second ensemble.

Define it as follows: let w be a word of the first set. It replaces all yx factors of the word by a special letter "$\sim$". In the resulting word, maximal factors containing both letters x and y have the form $x^a y^b (a \geq 0, b \geq 0)$. Exchange these factors with $x^b y^a$ and replace each "$\sim$" by yx, to get the word w of the second set.

Par exemple, pour $w = 122322233243213$, $x = 2$ et $y = 3$, on obtient successivement :

$$\begin{aligned} w &= 122322233243213 \\ &\mapsto 122{\sim}223{\sim}4{\sim}13 \\ &\mapsto 133{\sim}233{\sim}4{\sim}12 \\ &\mapsto 133322333243212 = w'; \end{aligned}$$

On a $w \in R(2,7,5,1)$ et $w' \in R(2,5,7,1)$.

For example, for $w = 122322233243213$, $x = 2$ and $y = 3$, one obtains successively :

$$\begin{aligned} w &= 122322233243213 \\ &\mapsto 122{\sim}223{\sim}4{\sim}13 \\ &\mapsto 133{\sim}233{\sim}4{\sim}12 \\ &\mapsto 133322333243212 = w'; \end{aligned}$$

We have $w \in R(2,7,5,1)$ and $w' \in R(2,5,7,1)$.

La bijection cherchée Φ est définie, pour tout mot $w \in R(\mathbf{m})$ et toute lettre x, par la composition suivante :

$$\Phi(wx) = \big((C_x)^{-1} \circ \Phi \circ \theta_{\mathbf{m}^x,\mathbf{m}_x} \circ C^x(w)\big)\, x.$$

On vérifie bien que $\Phi(wx)$ est un réarrangement de wx et que la relation (Δ) est satisfaite.

The desired bijection Φ is defined, for any word $w \in R(\mathbf{m})$ and any letter x, by the following composition:

$$\Phi(wx) = \big((C_x)^{-1} \circ \Phi \circ \theta_{\mathbf{m}^x,\mathbf{m}_x} \circ C^x(w)\big)\, x.$$

One checks that $\Phi(wx)$ is a rearrangement of wx and that the relation (Δ) is satisfied.

L'exploitation des techniques utilisées dans cette Note sera publiée ultérieurement.

The applications of the techniques used in this Note will be published later.

5 References (RÉFÉFENCES BIBLIOGRAPHIQUES)

1. G. E. ANDREWS. Problems and prospects for basic hypergeometric function, Theory and Applications of Special Functions, Edité par R. A. ASKEY, 1975, Academic Press, New York, p. 191-224.

2. D. ZEILBERGER et D. M. BRESSOUD . A proof of Andrews' q-Dyson conjecture, Discrete Math., 54 (1985), pp. 201-224.

3. J. GREENE. Bijections related to statistics on words, Discrete Math., 68 (1988), pp. 15-29.

4. D. M. BRESSOUD. Problems on the Z-statistic, Discrete Math., 73 (1988), pp. 37-48.

5. D. FOATA. On the Netto inversion number of a sequence, Proc. Amer. Math. Soc, 19 (1968), pp. 236-240.

6. D. ZEILBERGER. Dans Séance de problèmes, Combinatoire énumérative, Lecture Notes in Mathematics, Edité par G. LABELLE et P. LEROUX, 1986, Springer-Verlag, t. 1234, p. 387.